学校编码：10384　　分类号______ 密级______

学号：19020111152522　　UDC______

厦门大学

硕 士 学 位 论 文

两类无穷维李代数表示的研究

Representations of two infinite-dimensional Lie algebras

李 志 强

指导教师姓名：王 清 副教授

专 业 名 称：基 础 数 学

论文提交日期：2014 年 4 月

论文答辩日期：2014 年 5 月

学位授予日期：2014 年 月

答辩委员会主席：__________

评 阅 人：__________

2014 年 5 月

厦门大学学位论文原创性声明

兹呈交的学位论文，是本人在导师指导下独立完成的研究成果。本人在论文写作中参考的其他个人或集体的研究成果，均在文中以明确方式标明。本人依法享有和承担由此论文产生的权利和责任。

声明人（签名）：

年　　月　　日

厦门大学学位论文著作权使用声明

本人完全了解厦门大学有关保留、使用学位论文的规定。厦门大学有权保留并向国家主管部门或其指定机构送交论文的纸质版和电子版，有权将学位论文用于非赢利目的的少量复制并允许论文进入学校图书馆被查阅，有权将学位论文的内容编入有关数据库进行检索，有权将学位论文的标题和摘要汇编出版。保密的学位论文在解密后适用本规定。

本学位论文属于

1、保密 （ ），在 年解密后适用本授权书。

2、不保密（ ）

作者签名： 日期： 年 月 日

导师签名： 日期： 年 月 日

中文摘要

本文首先分类了李代数 $\mathfrak{sl}_d(\mathbb{C}_q)$ 的权空间有限维的不可约可积模 V, 其中 $\mathbb{C}_q$ 是两个变量的 Laurent 多项式环, q 为非零复数, $\mathfrak{sl}_d(\mathbb{C}_q)=\{X\in M_d(\mathbb{C}_q)\mid \mathrm{Tr}(X)\in[\mathbb{C}_q,\mathbb{C}_q]\}$, $\mathbb{C}_q$ 为两个变量的量子环面. 具体地, $\mathfrak{sl}_d(\mathbb{C}_q)=I\otimes[\mathbb{C}_q,\mathbb{C}_q]\oplus\mathfrak{sl}_d(\mathbb{C})\otimes\mathbb{C}_q$, 其李关系如下:

$$[X\otimes t^{\underline{a}},Y\otimes t^{\underline{b}}]=B(X,Y)I\otimes[t^{\underline{a}},t^{\underline{b}}]+[X,Y]\otimes\frac{t^{\underline{a}}\circ t^{\underline{b}}}{2}+(X\circ Y)\otimes\frac{[t^{\underline{a}},t^{\underline{b}}]}{2},$$

$$[I\otimes[t^{\underline{a}},t^{\underline{b}}],X\otimes t^{\underline{c}}]=X\otimes[[t^{\underline{a}},t^{\underline{b}}],t^{\underline{c}}],$$

$$[I\otimes[t^{\underline{a}},t^{\underline{b}}],I\otimes[t^{\underline{c}},t^{\underline{d}}]]=I\otimes[[t^{\underline{a}},t^{\underline{b}}],[t^{\underline{c}},t^{\underline{d}}]],$$

其中

$$[X,Y]=XY-YX,$$

$$X\circ Y=XY+YX-\frac{2}{d}\mathrm{Tr}(XY)I,$$

$$[t^{\underline{a}},t^{\underline{b}}]=t^{\underline{a}}t^{\underline{b}}-t^{\underline{b}}t^{\underline{a}},\quad t^{\underline{a}}\circ t^{\underline{b}}=t^{\underline{a}}t^{\underline{b}}+t^{\underline{b}}t^{\underline{a}},$$

$$B(X,Y)=\frac{1}{d}Tr(XY),$$

$X,Y\in\mathfrak{sl}_d(\mathbb{C})$, $\underline{a}$, $\underline{b}$, $\underline{c}\in\mathbb{Z}^2$, $\mathrm{Tr}(X)=\sum_{i=1}^{d}x_{ii}$, 以及 $X=(x_{ij})\in M_d(\mathbb{C})$. 得出了如果 q 是 N 次本原单位根, 每个那么 V 同构于 $\bigotimes_i V_i$, 其中 V_i 是 $\mathfrak{sl}_{dN}(\mathbb{C})$ 的一个有限维不可约模. 如果 q 是非单位根, 那么 V 是一维平凡模.

其次我们又研究李代数 L 上的 Verma模, 这里李代数 L 由集合 $\{t^\alpha,\ E(\alpha),\ K_i\mid\alpha\in\mathbb{Z}^2\setminus\{(0,0)\}\}$ 在复数域上线性张成, 李关系如下:

$$[t^\alpha,t^\beta]=0;$$

$$[K_i,L]=0,i=1,2,3,4;$$

$$[t^\alpha,E(\beta)]=\det\begin{pmatrix}\beta\\\alpha\end{pmatrix}t^{\alpha+\beta}+\delta_{\alpha+\beta,0}h(\alpha);$$

$$[E(\alpha), E(\beta)] = \det\binom{\beta}{\alpha} E(\alpha+\beta) + \delta_{\alpha+\beta,0} f(\alpha),$$

其中 $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}^2 \setminus \{(0,0)\}$, $h(\alpha) = \alpha(1)K_1 + \alpha(2)K_2$, $f(\alpha) = \alpha(1)K_3 + \alpha(2)K_4$, K_i 是中心元素, $i = 1, 2, 3, 4$. 我们得到了 Verma 模不可约的充要条件. 当 Verma 模是可约的情况下, 得到了其极大真子模.

关键词： 扩张仿射李代数; 量子环面; 秩为 2 的 Heisenberg-Virasoro 代数; Verma 模.

Abstract

First, we classify the irreducible integrable modules for the Lie algebra $\mathfrak{sl}_d(\mathbb{C}_q)$, with finite dimensional weight $\mathfrak{sl}_d(\mathbb{C}_q)$ spaces, where $\mathbb{C}_q$ is the quantum torus in two variables, q is a nonzero complex number, $\mathfrak{sl}_d(\mathbb{C}_q) = \{X \in M_d(\mathbb{C}_q) \mid \mathrm{Tr}(X) \in [\mathbb{C}_q, \mathbb{C}_q]\}$ and $\mathbb{C}_q$ is the quantum torus in two variables. In details, $\mathfrak{sl}_d(\mathbb{C}_q) = I \otimes [\mathbb{C}_q, \mathbb{C}_q] \oplus \mathfrak{sl}_d(\mathbb{C}) \otimes \mathbb{C}_q$, with the Lie bracket as follow:

$$[X \otimes t^{\underline{a}}, Y \otimes t^{\underline{b}}] = B(X,Y) I \otimes [t^{\underline{a}}, t^{\underline{b}}] + [X,Y] \otimes \frac{t^{\underline{a}} \circ t^{\underline{b}}}{2} + (X \circ Y) \otimes \frac{[t^{\underline{a}}, t^{\underline{b}}]}{2},$$

$$[I \otimes [t^{\underline{a}}, t^{\underline{b}}], X \otimes t^{\underline{c}}] = X \otimes [[t^{\underline{a}}, t^{\underline{b}}], t^{\underline{c}}],$$

$$[I \otimes [t^{\underline{a}}, t^{\underline{b}}], I \otimes [t^{\underline{c}}, t^{\underline{d}}]] = I \otimes [[t^{\underline{a}}, t^{\underline{b}}], [t^{\underline{c}}, t^{\underline{d}}]],$$

where

$$[X,Y] = XY - YX,$$

$$X \circ Y = XY + YX - \frac{2}{d}\mathrm{Tr}(XY) I,$$

$$[t^{\underline{a}}, t^{\underline{b}}] = t^{\underline{a}} t^{\underline{b}} - t^{\underline{b}} t^{\underline{a}}, \quad t^{\underline{a}} \circ t^{\underline{b}} = t^{\underline{a}} t^{\underline{b}} + t^{\underline{b}} t^{\underline{a}},$$

$$B(X,Y) = \frac{1}{d} Tr(XY),$$

$X, Y \in \mathfrak{sl}_d(\mathbb{C})$, $\underline{a}$, $\underline{b}$, $\underline{c} \in \mathbb{Z}^2$, $\mathrm{Tr}(X) = \sum_{i=1}^d x_{ii}$, $X = (x_{ij}) \in M_d(\mathbb{C})$. We get that $V \cong \otimes V_i$, where V_i is a finite irreducible module of $\mathfrak{sl}_{dN}(\mathbb{C})$, if q is a primitive N-th root of unity. And V is trivial, if q is generic.

Next, we study the Verma modules over the Lie algebra L, which is spanned by the set $\{t^\alpha,\ E(\alpha),\ K_i \mid \alpha \in \mathbb{Z}^2 \setminus \{(0,0),\ i = 1,2,3,4\}\}$ over $\mathbb{C}$, with Lie bracket as follow:

$$[t^\alpha, t^\beta] = 0;$$

$$[K_i, L] = 0, i = 1,2,3,4;$$

$$[t^\alpha, E(\beta)] = \det\begin{pmatrix}\beta \\ \alpha\end{pmatrix} t^{\alpha+\beta} + \delta_{\alpha+\beta,0} h(\alpha);$$

$$[E(\alpha), E(\beta)] = \det\begin{pmatrix}\beta\\ \alpha\end{pmatrix} E(\alpha+\beta) + \delta_{\alpha+\beta,0} f(\alpha),$$

where $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}^2 \setminus \{(0,0)\}$, $h(\alpha) = \alpha(1)K_1 + \alpha(2)K_2$, $f(\alpha) = \alpha(1)K_3 + \alpha(2)K_4$, K_i is center element for $i = 1, 2, 3, 4$. We give the sufficient and necessary conditions for the Verma modules to be irreducibility. And also we study when the Verma modules are reducible, we find theirs maximal submodules.

Key words: EALA; $\mathbb{C}_q$; Lie algebra arising from the 2-dimensional torus; Verma module.

目　录

Contents

第 一 章　绪论

李群是具有群结构的流形, 是由挪威数学家 S. Lie 于1870年左右在研究微分方程的积分曲线族在什么变换下不变时发现并给出的定义. 李代数是为研究李群时引入的. 早期, 人们主要研究有限维李代数, 数学家 Lie, Cartan, Killing, Weyl, Serre, Chevalley 等人在这方面做出了突出的贡献, 给出了有限维复单李代数的分类, 即分为A, B, C, D, E_6, E_7, E_8, F_4和G_2八类复单李代数, 并给出了他们的构造. 后来, 在数学家 Cartan 和 Weyl 等人倡导下, 人们开始转向无限维李代数的研究, 并取得一系列的成果. Kac-Moody 李代数, 是由 Kac 和 Moody 分别独立研究, 并给出定义的一类李代数. 根据不可分解的广义 Cartan 矩阵的不同分为有限维单李代数, 仿射 Kac-Moody 李代数以及不定型的 Kac-Moody 李代数. 其中仿射 Kac-Moody 李代数, 作为有限维复单李代数的自然推广, 是一类很重要的无限维李代数. 众所周知, 仿射 Kac-Moody 李代数的权空间有限维的不可约可积模已给出了分类, 见文献[5, 6, 7], 即如果中心作用非平凡, 这些模是高权模或是低权模; 如果中心作用平凡, 这些模是 Loop 模. 作为仿射 Kac-Moody 李代数的自然推广, 文献[9]引进了扩张仿射李代数(EALA)的概念. Allison, Azam, Berman, Gao 和 Pianzola 等人在文献[1, 3]中对其根系进行了分类. 随着扩张仿射李代数引起越来越多人的关注, EALA 的表示理论自然得到很大发展, 其中 Rao 等人在这方面有很多的工作. Toroidal 李代数和由坐标环面为量子环面确定的李代数是很重要的两类高维仿射李代数. Toroidal 李代数的权空间有限维的不可约可积模在文章[12, 13]中给出了完整的分类. 正如前面所说的, 扩张仿射李代数的坐标代数并非一定是洛朗多项式环, 也可能是量子环面, 约当环面或交错环面, 具体和李代数的类型有关(参见文章 [1, 2, 3, 4, 16]). 例如A_{d-1}型的扩张仿射李代数有一类是$\mathfrak{gl}_d(\mathbb{C}) \otimes \mathbb{C}_q$, 其中$\mathbb{C}_q$为量子环面. 在文章[14], $\tilde{\tau}$的中心作用非平凡的权空间有限维的不可约可积模已给出了分类, 其中τ是坐标代数为双变元的量子环面$\mathbb{C}_q$的A_{d-1}型高维仿射李代数的核, $\tilde{\tau}$是τ和两个度导子的半直积. 这些模明确的构造见文章[8]. 在本篇文章, 我们分类中心作用平凡的权空间有限维的不可约可积$\tau-$模. 也即是, 我们分类李代数$\mathfrak{sl}_d(\mathbb{C}_q)$的权空间有限维的不可约可积模.

仿射 Kac-Moody 代数也可以看成从一维环面到复数域上有限维单李代数的多项式映射的泛中心扩张, 也就是说, 它们以单变量的洛朗多项式环为其坐标代数. 单变量的洛朗多项式环的导子李代数称为 Witt 代数, 而 Witt 代数的泛中心扩张称为 Virasoro 代数. Virasoro 代数的表示在仿射 Kac-Moody 李代数可积模的构造以及其结构分析和可积模的分类中都扮演着重要的角色(见[35, 36]). 同时, Virasoro 代数的 unitary 表

示在 moonshine 模以及顶点算子代数的构造和结构分析中也有许多应用(见[37]). 此外, Virasoro 代数的表示在理论物理的弦理论也得到了广泛的研究, 事实上, Virasoro 代数蕴含在任何具有共形不变量的2维时空理论中. 由此可见, 李代数的坐标代数的导子李代数及其中心扩张在李代数的表示研究中起着重要作用, 同时它自身在数学和理论物理中也有许多应用. 因此, 在本文第三章我们考虑的李代数可以看成秩为1的 Heisenberg-Virasoro 代数的推广. 秩为1的 Heisenberg-Virasoro 代数$HVir$是李代数$\mathcal{D}$的一维泛中心扩张, 其中李代数$\mathcal{D}$首先给出在文章[17]. 李代数$\mathcal{D}$是复数域上一向量空间, 有一组基$\{t^n, d_n = t^{n+1}\frac{d}{dt} | n \in \mathbb{Z}\}$, 李关系如下:

$$[t^n, t^m] = 0,\ [d_i, t^n] = nt^{i+n},\ [d_i, d_j] = (j-i)d_{i+j},$$

并且$HVir$的李关系如下:

$$[d_m, d_n] = (n-m)d_{m+n} + \delta_{m+n,0}\frac{m^3-m}{12}c_1,$$

$$[d_m, t^n] = nt^{m+n} + (m^2-m)\delta_{m+n,0}c_2,$$

$$[t^m, t^n] = m\delta_{m+n,0}c_3,\ [c_i, HVir] = 0,\ i = 1, 2, 3.$$

可以看出李代数$HVir$包含一个 Heisenberg 代数和一个 Virasoro 代数作为子代数. 在文章 [20], 作者把秩为1的 Heisenberg-Virasoro 代数推广到秩为2的情况. 更详细的, 令A代表洛朗多项式环$\mathbb{C}[t_1^{\pm 1}, t_2^{\pm 1}]$, B为 A的斜导子构成的集合. 可得B是复数域上的线性空间, 有下面一组基,

$$\{E(\alpha) \mid E(\alpha) = t^\alpha(\alpha(2)d_1 - \alpha(1)d_2)\},$$

其中 $\alpha = (\alpha(1), \alpha(2)) \in \mathbb{Z}^2$, $t^\alpha = t_1^{\alpha(1)}t_2^{\alpha(2)}$, d_1, d_2是A的度导子. 令$\tilde{L} = A \oplus B$. 那么$\tilde{L}$可以看作李代数, 李关系如下:

$$[t^\alpha, t^\beta] = 0, \quad [t^\alpha, E^\beta] = \det\binom{\beta}{\alpha}t^{\alpha+\beta},$$

$$[E(\alpha), E(\beta)] = \det\binom{\beta}{\alpha}E(\alpha+\beta),$$

其中$\alpha, \beta \in \mathbb{Z}^2$, $\det\binom{\beta}{\alpha} = \beta(1)\alpha(2) - \alpha(1)\beta(2)$. 令$\tilde{L}'$是李代数$\tilde{L}$的导出子李代数. 可得$\tilde{L}'$是完备的. 令李代数$L$是$\tilde{L}'$的泛中心扩张, 其李关系如下:

$$[t^\alpha, t^\beta] = 0;$$